Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Al patrulea test de selecţie pentru Olimpiada Internaţională de Matematică

14 mai 2009

Subiectul 1. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$, şi S mulţimea n-uplurilor $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ de numere naturale care au următoarea proprietate:

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \quad \text{şi} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Determinaţi

$$\max \left\{ a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,\middle|\, (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in S \right\}.$$

Subiectul 2. Fie $m < n$ două numere naturale, I şi J două mulţimi astfel încât $|\,I\,| = |\,J\,| = n$ şi $|\,I \cap J\,| = m$ şi $\mathbf{u}_k$, $k \in I \cup J$, vectori în plan astfel încât

$$\left| \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i \right| = \left| \sum_{j \in J} \mathbf{u}_j \right| = 1.$$

Arătaţi că

$$\sum_{k \in I \cup J} |\mathbf{u}_k|^2 \geq 2/(m+n)$$

şi determinaţi cazurile de egalitate.

Subiectul 3. Arătaţi că orice triunghi neechilateral Δ poate fi descompus într-un număr finit (strict mai mare decât 1) de triunghiuri, care îndeplinesc simultan următoarele trei condiţii:

(1) oricare două triunghiuri din descompunere au interioarele disjuncte, iar intersecţia lor este vidă sau un vârf comun sau o latură comună;

(2) oricare două triunghiuri din descompunere nu sunt congruente; şi

(3) fiecare triunghi din descompunere este asemenea cu Δ.

Timp de lucru: 4 ore.